Лекция 7_ЖСТдағы постньютон жуықтаудағы сынақ денелерінің қозғалысы: әдістеме, нәтижелер және талдау

Альберт Эйнштейннің жалпы салыстырмалылық теориясында (ЖСТ) материя мен сынақ денелердің қозғалысы масса мен энергияның әсерінен пайда болған гравитациялық өрістер арқылы сипатталған. ЖСТ– гравитацияны кеңістік-уақыттың геометриялық иілісі ретінде сипаттайтын іргелі теория. Дәрісте әлсіз гравитациялық өрістер мен төмен жылдамдықтар жағдайында ЖСТ жуықтауы болып табылатын постньютондық жуықтаудағы сынақ денелерінің қозғалысының әдістері, нәтижелері және талдауы туралы түсінік береміз және мынадай негізгі аспектілерді қамтиды:

- ЖСТ мен постньютондық жуықтауды әлсіз гравитациялық өрістердегі денелердің қозғалысын сипаттау әдісі ретінде қарастыру;
- Метрикалық тензорды және Кристоффель таңбасын қоса, гравитациялық өрістердегі сынақ денелерінің қозғалысын сипаттайтын қозғалыс теңдеулерін жазу;
- Постньютондық жуықтауды қолдану жуықтауды қолдану мысалдары;
- Постньютондық жуықтауда қозғалысты талдау әдістері, оның ішінде сандық әдістер, жуықтаулар және жуықтау шешімдері;
- ЖСТ болжамын және постьнютон жуықтауды растайтын заманауи тәжірибелер мен бақылауларға шолу;
- Постьнютондық жуықтау шектеулерін және оның қашан қолдануға болатынын қарастыру және т.б.

Адиабаталық теорияны Керр кеңістік-уақытта қолдану үшін бізге Керр метрикасы $\frac{1}{c^2}$ дәрежесінде кеңейтілген және (26) теңдеуде берілген гармониялық координаттармен жазылуы керек. Содан кейін метриканың айқын түрінен сынақ денесінің Лагранж функциясын жазамыз

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Gm_0m}{r} + \frac{mv^4}{8c^2} +$$

$$+\frac{3Gm_0mv^2}{2c^2r} - \frac{G^2m_0^2m}{2c^2r^2} -$$

$$-\frac{GmJ^2}{c^2m_0r^3}P_2(cos\theta) - \frac{4G\left(\vec{v}\cdot\left[\vec{r},\vec{J}\right]\right)}{c^2r^3}. \tag{1}$$

Сонымен қатар, сынақ денелердің жылдамдығы стандартты түрде анықталады

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{\sin^2\theta d\phi^2}{dt^2}\right). \tag{2}$$

Бұл сызықтық жылдамдық түрін, тек гармониялық және изотроптық координаттарда ғана қолдануға болады. Енді Гамильтон функциясын алуды көрсетелік

$$H = (\vec{p} \cdot \vec{v}) - L, \tag{3}$$

Мұндағы $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ – жалпыланған импульс

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{mv^2}{2c^2}\vec{v} + \frac{3Gm_0 m}{c^2 r}\vec{v} - \frac{4G}{c^2 r^3}\left[\vec{r}, \vec{J}\right], \tag{4}$$

және $\vec{v}$ сызықтық жылдамдық

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\vec{p} - \frac{3Gm_0}{c^2 r}\vec{p} + \frac{4G}{c^2 r^3}\left[\vec{r}, \vec{J}\right]\right), \tag{5}$$

(1)-(5) ескеріп гамильтонианды жазамыз

$$\mathrm{H} = \mathrm{mc}^2 + \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{Gm_0m}}{\mathrm{r}} - \frac{\mathrm{p}^4}{8\mathrm{c}^2\mathrm{m}^3} - \frac{3\mathrm{Gm_0p^2}}{2\mathrm{c^2mr}} + \frac{\mathrm{G^2m_0^2m}}{2\mathrm{c^2r^2}} +$$

$$+ \frac{\mathrm{GmJ^2}}{\mathrm{c^2m_0r^3}}\mathrm{P_2}(\cos\theta) + \frac{2\mathrm{G}\left(\vec{\mathrm{p}} \cdot [\vec{\mathrm{r}}, \vec{J}]\right)}{\mathrm{c^2r^3}}. \tag{6}$$

Енді, адиабаталық теорияға сәйкес, бөлшектің айналу T периоды бойынша (6) әрбір мүшені орташалау керек. Кез келген f функциясының айналу периодындағы орташа мәні мына жолмен анықталады:

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f dt. \tag{7}$$

Полярлық координаталардағы релятивистік емес орбиталық бұрыштық моментті M қолдану арқылы орташалау ыңғайлы (7)

$$M = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}. \tag{8}$$

эллипстік орбитадағы қозғалыс үшін t бойынша интегралдан ϕ үстіндегі интегралға ауысуға мүмкіндік береді. Мұнда біз Кеплер мәселесінің келесі шешімін қолданамыз

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}, \quad 0 < \varphi \le 2\pi, \tag{9}$$

Мұндағы e орбитаның эксцентриситеті, P жарты фокустық қашықтық, ал φ - полярлық бұрыш. Демек,

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi)\frac{dt}{d\varphi}d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^T f(\varphi)r^2 d\varphi \tag{10}$$

Сонымен қатар, (6) теңдеудегі мәндерді орташалау үшін радиус векторы $\vec{r}$ және импульсі $\vec{p} = m\vec{v}$ деп алып, жазықтықтағы радиус векторының келесі түрін және дененің жылдамдығын жазамыз

$$\vec{r} = r(\vec{\imath}cos\varphi + \vec{\jmath}sin\varphi), \tag{11}$$

$$\vec{v} = \frac{M}{mP}(-\vec{\imath}\,sin\,\varphi + \vec{\jmath}\,(e + cos\,\varphi)), \tag{12}$$

Сондай-ақ, орталық дененің айналу бағытын қалауымызша аламыз. Ыңғайлылық үшін ол бағытты $\vec{J} = J\vec{k}_0$ сияқты z_0 осімен аламыз. Экваторлық емес жазықтықта қозғалатын сынақ денесі үшін оның орбиталық бұрыштық моментінің бағыты орталық дененің тиісті бұрыштық моментімен сәйкес келмейді (олар тек экваторлық жазықтықта сәйкес келеді, яғни $\theta = 90^0$ болғанда).

Содан кейін x, y, z координаталары бар айналмалы жүйеде xy жазықтығында жатқан эллипстік орбита бойымен қозғалатын дененің айналу периодын орташалаймыз

$$P = \frac{M^2}{m\alpha} = \alpha(1 - e^2), \qquad e = \sqrt{1 - \frac{M^2}{M_0^2}}, \qquad T = \frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2} = 2\pi\sqrt{\frac{m\alpha^3}{\alpha}}, \tag{13}$$

Гамильтон функциясы бойынша орташалау

$$\bar{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M} + \frac{2m^2\alpha^4}{c^2m_0M_0^3M^3}\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right) +$$

$$+ \frac{15m\alpha^4}{8c^2M_0^4} + \frac{m^3\alpha^4}{4c^2m_0^2M_0^3M^3}(J^2 - \frac{3\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right)^2}{M^2} \tag{14}$$

Атап өткеніміздей орташаланған гамильтониан M_0 адиабаталық инвариант және орбитаның M бұрыштық моментінен тәуелді болады. Келесі қадам $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықты табу болып табылады. Ол үшін $\vec{\Omega} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial\vec{M}}$ сәйкес:

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^2}\vec{e}_M + \frac{2m^2\alpha^4 J}{c^2m_0M_0^3M^3}\left(\vec{e}_J - 3\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right) -$$

$$-\frac{3m^3\alpha^4J^2}{4c^2m_0^2M_0^3M^4}\left(2\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)\vec{e}_J+\left(1-5\left(\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)^2\right)\vec{e}_M\right),\qquad(15)$$

Мұндағы $\vec{M}=M\vec{e}_M$ және $\vec{J}=J\vec{e}_J$. Бұл Лензе Тирринг метрикасына арналған $\sim J^2$ шартын қанағаттандыратын мәні болып табылады.

Қозғалыс теңдеулерінің жалпы түрінен орбита және онымен байланысты орбиталық координаталар жүйесі (15) түрдегі бұрыштық жылдамдықпен қозғалмайтын нүктенің айналасында қатты дене ретінде айналатыны шығады. Сондықтан бұрыштық жылдамдықты қозғалмайтынға қатысты айналмалы координаталар жүйесінің бағдарын анықтайтын Эйлер бұрыштарының туындыларымен байланыстыруға болады. Қозғалмайтын координаталар жүйесін x_0, y_0, z_0 бірлік векторларымен ($\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0$) және айналмалыны x, y, z бірлік векторларымен ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) деп белгілейік. Сонымен қатар, келесі белгілеулерді, Эйлер бұрыштары: δ - прецессия, g - меншікті айналу (метрикалық тензордың анықтаушысымен шатастыруға болмайды), i - нутационды (сынақ денесінің орбитасының көлбеу бұрышы). Содан кейін бұрыштық жылдамдықты келесідей көрсетуге болады

$$\vec{\Omega}=\dot{\delta}\vec{e}_{z0}+\dot{i}\vec{e}_\delta+\dot{g}\vec{e}_z,\qquad(16)$$

мұндағы $\vec{e}_\delta$ - N түйін сызығының бағытытының бірлік векторы, $\vec{e}_{z0}=\vec{k}_0=\vec{e}_j$ - z_0 бағыттағы бірлік вектор, $\vec{e}_z=\vec{k}=\vec{e}_M$ - z бағыттағы бірлік вектор, және $\dot{\delta}, \dot{i}, \dot{g}$ – сәйкес Эйлер бұрыштарының туындылары. $\vec{e}_z$ векторы $\vec{M}$-мен, ал $\vec{e}_{z0}$ векторы $\vec{J}$-мен бағыттас екенін атап өткен жөн. Содан кейін, i болса $\vec{J}$ және $\vec{M}$ арасындағы бұрышты көрсетеді (2-суретті қараңыз). Енді жоғарыда келтірілген нәтижелерді қарастырып, бұрыштық жылдамдықты (15) жалпы өрнекпен (16) салыстыра отырып, мынаны аламыз

$$\dot{i}=0\qquad(17)$$

$$\dot{\delta}=\frac{2m^2\alpha^4J}{c^2m_0M_0^3M^3}-\frac{3m^3\alpha^4J^2}{2c^2m_0^2M_0^3M^4}\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right),\qquad(18)$$

$$\dot{g}=\frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^2}-\frac{6m^2\alpha^4J}{c^2m_0M_0^3M^3}\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)-$$

$$-\frac{3m^3\alpha^4J^2}{4c^2m_0^2M_0^3M^4}\left(1-5\left(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M\right)^2\right),\qquad(19)$$

Демек (17), орбиталардың еңкеюі уақыт өте өзгермейді. Теңдеулерді интегралдау арқылы (18)-(19), сәйкес келетін абсолютті перигелийдің ығысу бұрышын g таба аламыз

$$\Delta g_{abs} = \Delta g + \Delta\delta. \tag{20}$$

Сосын

$$\Delta g_{abs} = \frac{6\pi\alpha^2}{c^2M^2} + \frac{4\pi m\alpha^2 J}{c^2 m_0 M^3}\left(1 - 3\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right)\right) -$$

$$-\frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{2c^2 m_0^2 M^4}\left(1 + 2\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right) - 5\left(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M\right)^2\right). \tag{47}$$

Сонымен, экваторлық емес жазықтықтағы сынақ женесінің қозғалысын зерттеу үшін тек перигелий ығысуының орбитаның көлбеу бұрышына айқын тәуелділігін ескеру қажет. Экваторлық жазықтықта $\vec{e}_J$ және $\vec{e}_M$ өзара параллель болғандықтан

$$\Delta g_{abs} = \frac{6\pi\alpha^2}{c^2M^2} - \frac{8\pi m\alpha^2 J}{c^2 m_0 M^3} + \frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{c^2 m_0^2 M^4}, \tag{22}$$

(13) сәйкес

$$\Delta g_{abs} = \frac{6\pi G m_0}{c^2 P} - \frac{8\pi G^{\frac{1}{2}} J}{c^2 m_0^{\frac{1}{2}} P^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\pi J^2}{c^2 m_0^2 P^2}. \tag{23}$$

Сонымен, қарастырылып отырған есепте бастапқы масса және бұрыштық импульс (екінші ретке дейін) бойынша берілген шешімнің жуықтау сипатына байланысты релятивистік әсерлердің суперпозиция принципі жарамды екенін көреміз. Мұнда бірінші мүше Шварцшильд есебінің шешіміне сәйкес келеді (яғни, орталық дененің массасынан туындаған кеңістік уақытының қисаюына байланысты термин); екінші мүше гравитация эффектісі ретінде пайда болған Лензе-Тирринг тарту әсері; ал соңғы мүше – екінші ретке дейінгі бұрыштық импульсті ескеретін түзету юолып табылады.

Қолданылған әдебиет

1. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.